# 数理生物学演習

第１２回　疫学モデル

林玲奈（Hayashi, Rena）
rena.hayashi.route66@gmail.com
理学部生物学科4年

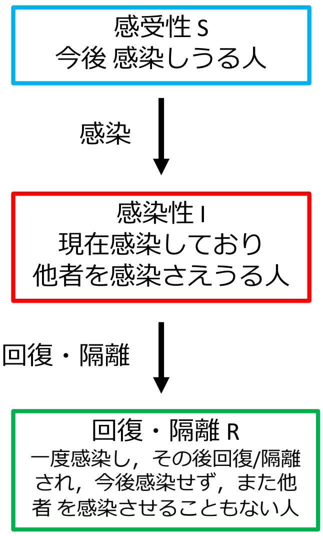
# 第５回：疫学モデル

本日の目標

- SIRモデルの解析
- 基本再生産数
- ウイルス感染動態のモデルを知る

# Kermack-McKendricのSIRモデル

仮定
- 人々を感受性(susceptible, S)，感染性(infectious, I)，回復・隔離(recovered/removed, R)の３状態のいずれかにある
- 感染症は感染している人と未感染の人が接触したとき，ある確率でうつる
- 感染から回復すると免疫をもち，再び感染することはない
- 移入・移出，出生・死亡などによる“人口の増減”はない




$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

$\beta$ : 伝達係数
$\gamma$ : 回復率・隔離率

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t)$$

**“人口の増減なし”**

$N(t) = S(t) + R(t) + I(t)$とすると $\dfrac{dN}{dt} = 0$

# 基本再生産数

- １人の感染者が，感染期間中に再生産する２次感染者の期待値のこと
- 基本再生産数を $r_0$ とすれば，もし $r_0 > 1$ ならば感染症の流行が起こる

**SIRモデルを仮定して，感染初期について基本再生産数を考えてみる**

初期条件を $I(0) = I_0$，$S(0) = S_0$，$R(0) = R_0$ とする.
感染症が出現したごく初期において全人口のほ とんどは感受性Sで占められているとすれば，感染性Iのダイナミクスは

$$\frac{dI}{dt} = (\beta S_0 - \gamma)I(t)$$ となる。

これを解くと

$I(t) = I_0 e^{\lambda_0 t}$　ただし　$\lambda_0 = \beta S_0 - \gamma$

よって$\lambda_0 > 0$ の場合に感染症の流行が起こる.

整理すると $\dfrac{\beta S_0}{\gamma} > 1$

つまり,この左辺が基本再生産数$r_0$　$r_0 = \dfrac{\beta S_0}{\gamma}$

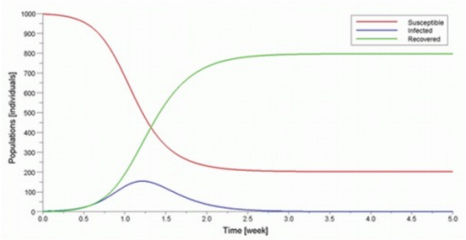
$\gamma$は回復・隔離率なので逆数$T = \frac{1}{\gamma}$は回復・隔離までの期間の期待値になる.
これを 使って書き直すと

$r_0 = 1 + \lambda_0 T$　となる

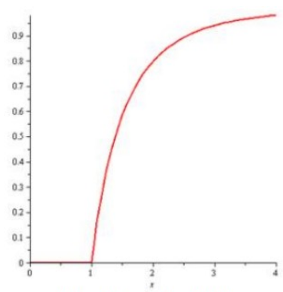
$\lambda_0$と$T$は実際のデータから推定しやす いケースが多い.

# 最終規模方程式(final size equation)

感染症の流行が起きた場合でも全ての人 が罹患するるわけではなく、流行は自然 に収束する




基本再生産数の関数として、累積罹患者数$R(\infty)$を計算すると以下のようになる。



累積罹患者数

基本再生産数

$(S(0), I(0), R(0)) = (S_0, 0, 0)$として

最終規模$z = \frac{R(\infty)}{S_0}$と基本再生産数$R_0$の関係を考える

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t) I(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t) I(t) - \gamma I(t)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t) \longrightarrow I(t) = \frac{1}{\gamma}\frac{dR(t)}{dt}$$

代入して $$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t) \frac{1}{\gamma}\frac{dR(t)}{dt}$$

$$\frac{1}{S(t)}\frac{dS(t)}{dt} = -\frac{\beta}{\gamma}\frac{dR(t)}{dt}$$

両辺を0から∞まで積分して

$$\ln\big(S(\infty)\big) - \ln\big(S(0)\big) = -\frac{\beta}{\gamma}\big(R(\infty) - R(0)\big)$$

$$S(0) = S_0,\ R_0 = 0, S(\infty) = (1 - z)S_0, R(\infty) = zS_0, R_0 = \frac{\beta S_0}{\gamma}$$

**最終規模方程式** $$\mathbf{1 - z = \exp(-zR_0)}$$

感受性 S
今後 感染しうる人

↓ 感染

感染性 I
現在感染しており
他者を感染さえうる人

↓ 回復・隔離

回復・隔離 R
一度感染し，その後回復/隔離され，今後感染せず，また他者 を感染させることもない人

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t) I(t)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta S(t) I(t) - \gamma I(t)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I(t)$$

$\beta$ : 伝達係数
$\gamma$ : 回復率・隔離率

初期値
$S(0) = S_0$
$I(0) = I_0$
$R(0) = R_0$

第４回の資料をもとに

オイラー法で離散化して

プログラムを組んでみよう.

# オイラー法 Euler's method

- 計算機は直接は微分や積分ができない
- 微分方程式を（時間方向に）離散化し計算機が扱えるようにする

**目的**

微分方程式
$$\frac{dx}{dt}=f(x,t)\ \cdots\ (1)$$
を数値的に解きたい.

微分の定義から
$$\frac{dx}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

なので，$\Delta t$ が十分に小さければ，
(1) は近似的に
$$f(x,t)\approx\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

変形すると
$$x(t+\Delta t)\approx x(t)+f(x,t)\Delta t$$

$x(0)=x_0$とし，
$x_1\ (=x(\Delta t)), x_2\ (=x(2\Delta t)), \cdots, x_n\ (=x(n\Delta t))$を考えると
$$x_n\approx x_{n-1}+f(x_{n-1},t_{n-1})\Delta t$$
ただし，$t_n=\Delta t\cdot n$

ここで
$$X_n=X_{n-1}+f(X_{n-1},t_{n-1})\Delta t$$
として，この $X_n$ を $x_n$ の近似値として採用する.

- 時間方向の刻み幅 $\Delta t$ を小さくすることである程度誤差を小さくできる
- オイラー法はあまり精度の良い近似法ではない

最終的なプログラムは
前回の差分方程式と似たものになる



2021年度　数理生物学演習第4回スライドより

# 指数増殖の離散化

**指数増殖**
$$\frac{dx}{dt}=ax$$

**微分の近似（Δtは十分小さいとする）**
$$\frac{dx}{dt}\approx\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

$$ax(t)\approx\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

**式を整理**
$$x(t+\Delta t)\approx x(t)+ax(t)\Delta t$$

$x(0)=x_0$とし，$x_1, x_2, \ldots, x_n$
また，$t_n=\Delta t\cdot n$

$$x_{n+1}\approx x_n+ax_n\Delta t$$

$$X_{n+1}=X_n+aX_n\Delta t$$



2021年度　数理生物学演習第4回スライドより

susceptible, $S$　についてオイラー法を用いて離散化

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t)$$

**微分の近似（Δは十分小さいとする）**

$$\frac{dS}{dt} \approx \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

$$-\beta S(t)I(t) \approx \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

**式を整理**

$$S(t+\Delta t) \approx S(t) - \beta S(t)I(t)\Delta t$$

$x(0) = x_0$とし, $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$

また, $t_n = \Delta t \cdot n$

$$S_{n+1} \approx S_n - \beta S_n I_n \Delta t$$

$X_n$ を $S_n$ , $Y_n$ を $I_n$, $Z_n$ を $R_n$ の近似値とすると

$$\boxed{\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n - \beta X_n Y_n \Delta t \\ Y_{n+1} &= Y_n + (\beta X_n Y_n - \gamma Z_n)\Delta t \\ Z_{n+1} &= Z_n - \gamma Z_n \Delta t \end{aligned}}$$

実際にプログラムを書いてみよう！

```
#12-01. モジュール・パッケージの読み込み
import math
import matplotlib.pyplot as plt
```

モジュールの読み込み
今回はずplotするのでmatplotlibは必須

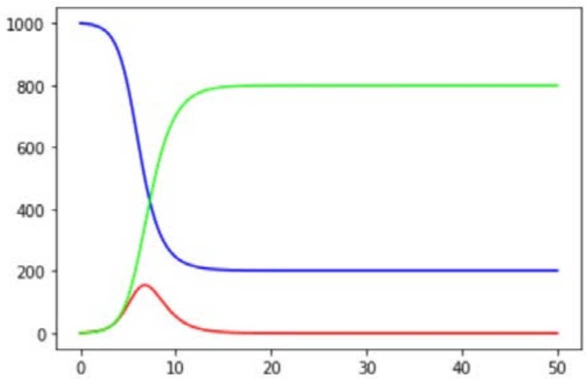
```
#12-02. 初期値設定
beta = 0.002
gamma = 1
x0 = 1000
y0 = 1
z0 = 0
r0 = beta*x0/gamma
print("基本再生産数は",r0,"です")

#時間幅の設定
dt = 0.01
t = 0

x = x0
y = y0
z = z0

tList = [t]
xList = [x]
yList = [y]
zList = [z]
```

初期値の設定
XがS　YがI　ZがR
としてコードは書いている。

```
#12-03. SIRモデル
for i in range(5000):
t = dt*(i+1)
xx = x + dt*(-beta*x*y)
yy = y + dt*(beta*x*y-gamma*y)
zz = z + dt*(gamma*y)
x = xx
y=yy
z=zz
tList.append(t)
xList.append(x)
yList.append(y)
zList.append(z)
```

SIRモデル
先程の離散化した式を使って
コードに実装する

```
#12-04. plot
plt.plot(tList, xList,
color="#0000ff")
plt.plot(tList, yList,
color="#ff0000")
plt.plot(tList, zList,
color="#00ff00")
```

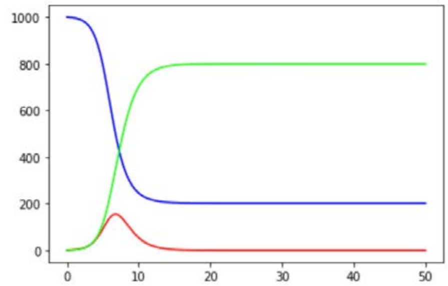


```python
#12-01. モジュール・パッケージの読み込み
import math
import matplotlib.pyplot as plt
```

```python
#12-02. 初期値設定
beta = 0.002
gamma = 1
x0 = 1000
y0 = 1
z0 = 0
r0 = beta*x0/gamma
print("基本再生産数は",r0,"です")

#時間幅の設定
dt = 0.01
t = 0

x = x0
y = y0
z = z0

tList = [t]
xList = [x]
yList = [y]
zList = [z]
```

```python
#12-03. SIRモデル
for i in range(5000):
t = dt*(i+1)
xx = x + dt*(-beta*x*y)
yy = y + dt*(beta*x*y-gamma*y)
zz = z + dt*(gamma*y)
x = xx
y=yy
z=zz
tList.append(t)
xList.append(x)
yList.append(y)
zList.append(z)
```

```python
#12-04. plot
plt.plot(tList, xList,
color="#0000ff")
plt.plot(tList, yList,
color="#ff0000")
plt.plot(tList, zList,
color="#00ff00")
```




# 14時50分まで休憩

# 本日の課題

1. 資料中のパラメータの値で、t > 4でβを半分に減らした時 と減らさないときのSIRモデルを重ねてプロットし、総罹患 者数の減少率を計算せよ。

2. 介入の方法を変更し、総罹患者数の減少率を計算 し、その介入の実際の意味を考察せよ。

ハード 3. R0>1の場合に解析的に導出される基本再生産数と，SIRモ デルの数値計算から十分に時間が経った時の総罹患者数か ら導出される基本再生産数を比較する図を作成し、最終規 模方程式が（ほぼ）正しいことを確かめよ.

4. 質問，意見，要望等をどうぞ.

課題をノートブック（.ipynbファイル）にまとめて，Moodleにて提出すること
ファイル名は[回数，01~15]_[難易度，ノーマル nかハード h].ipynb．例．07_n.ipynb

# 本日の課題のヒント

1. 資料中の図を重ねてプロットします。十分時間が経った時のR(殁)を 比較して、減少率を計算します。

2. 資料中ではβを半分にしていますが、他のパラメータを変えるような介入や、介入する時間を変えて計算してみてください。

3. 最終規模方程式をR0について解くと、十分な時間が経った時のR(t)（=z）からR0が計算できます。

研究の話

別のスライドへ