

# 数理生物学演習

第10回 空間構造の数理モデル（2）：  
パターン形成

野下 浩司 (Noshita, Koji)

✉ noshita@morphometrics.jp

🏠 <https://koji.noshita.net>

理学研究院 数理生物学研究室

1

## 第10回：パターン形成

本日の目標

- 2次元配列
- 有限差分法による離散化
- 分子の拡散
- 濃度勾配モデル
- 反応拡散モデル

2

# 拡散方程式

熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u$$

拡散が生じる分子などのダイナミクスを記述する  
集団遺伝学で出てくることもある

空間微分演算子

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

スカラー量（例えば、拡散性分子の濃度）の勾配

$$\text{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \mathbf{e}_n$$

より詳しく知りたい人は物理数学やベクトル解析などを調べよう

3

## 熱伝導方程式の解析解と記述される現象の例

境界条件により異なる解を得ることができる。  
ここでは1次元の場合について2つ紹介する。

熱伝導方程式

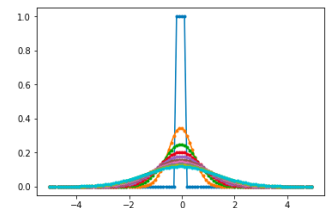
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u$$

$$u(0, t) = u_0 (> 0)$$

$$x \rightarrow -\infty, \infty \text{ で } u(x, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

過渡解

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$



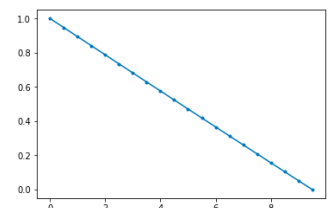
ある部位で生産された分子が広がっていくさま など

$$u(x_0, t) = u_0 (> 0)$$

$$u(x_1, t) = u_1 (> 0)$$

定常解

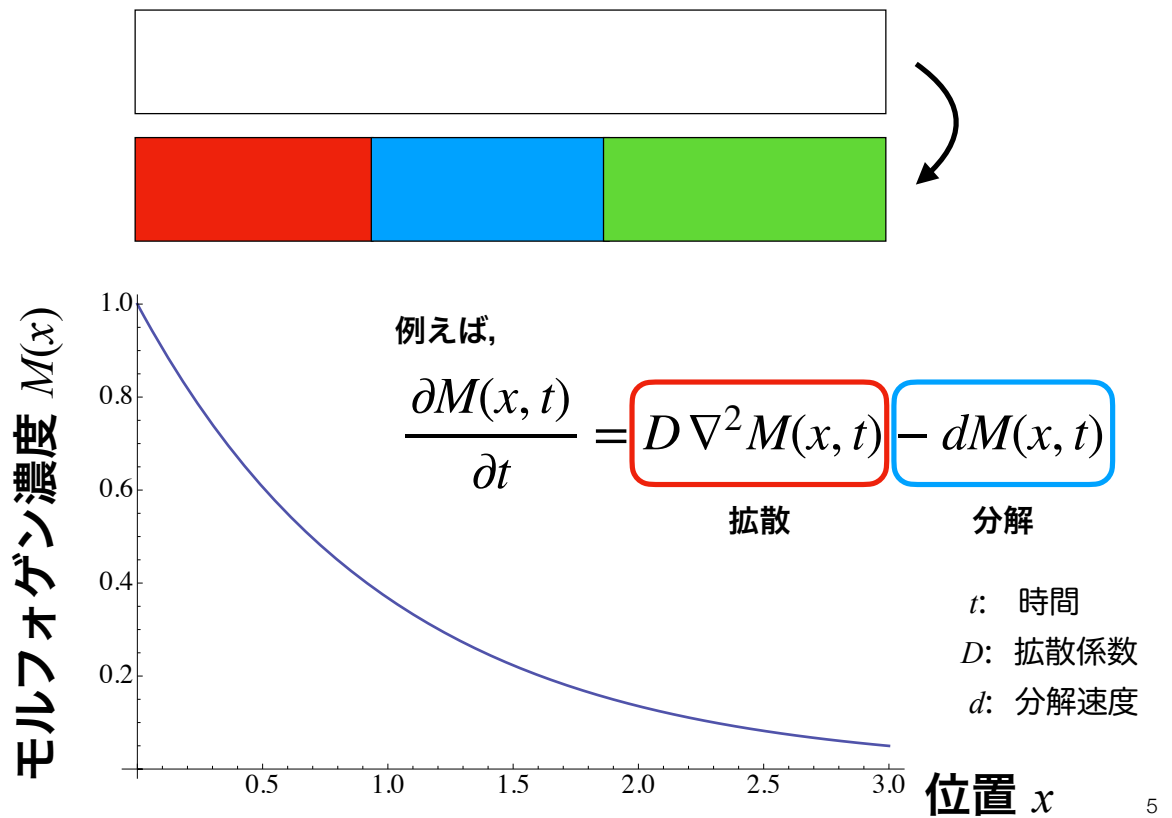
$$u(x) = \frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0} x + u_0$$



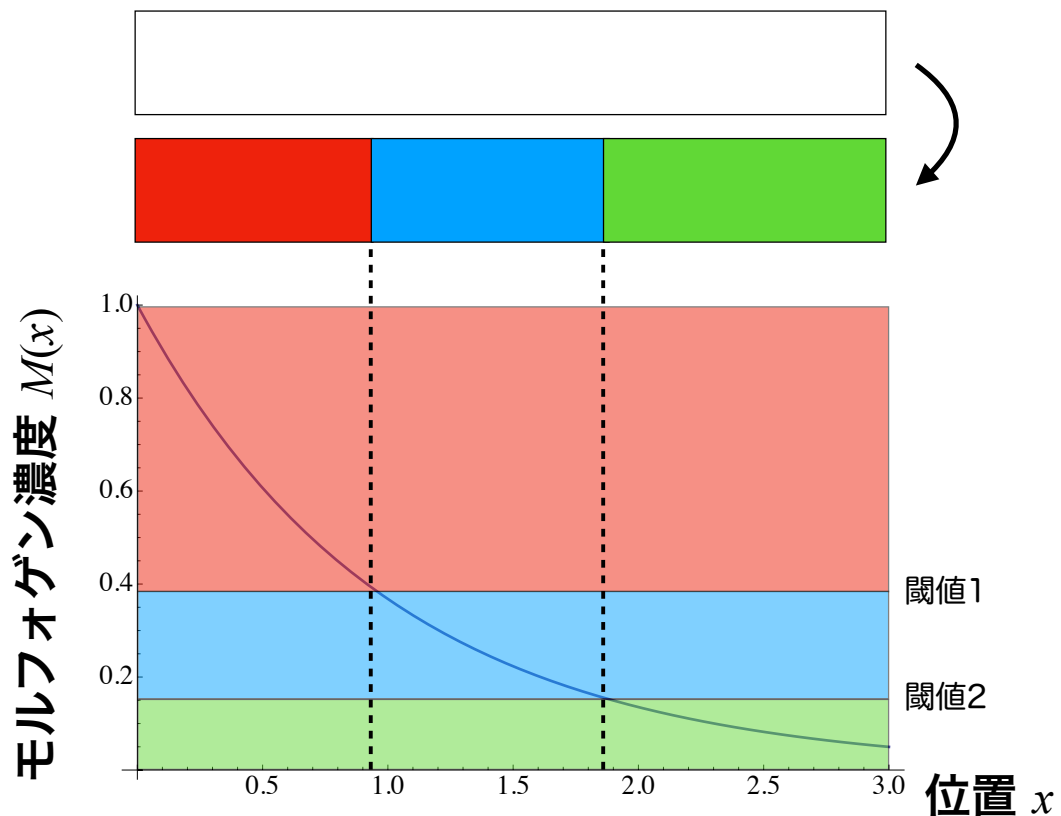
膜を隔てた分子の勾配 など

4

# モルフォゲンによるパターン形成



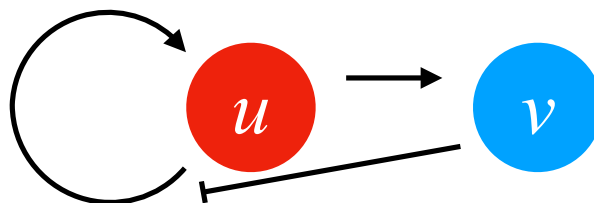
# モルフォゲンによるパターン形成



# 反応拡散モデル ギーラー-メインハルト系

仮定

- •  $u$ と $v$ は共に拡散する
- •  $u$ と $v$ は共に一定速度で分解される
- •  $u$ は自己活性化する
- •  $v$ は $u$ の合成を抑制する
- •  $u$ は $v$ の合成を促進する
- •  $u$ は一定速度で生成される



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u - d_u u + k_1 \frac{u^2}{v} + \frac{k_2}{\text{生成}} \\ \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \nabla^2 v - d_v v + \frac{k_3 u^2}{\text{合成の促成}} \end{cases}$$

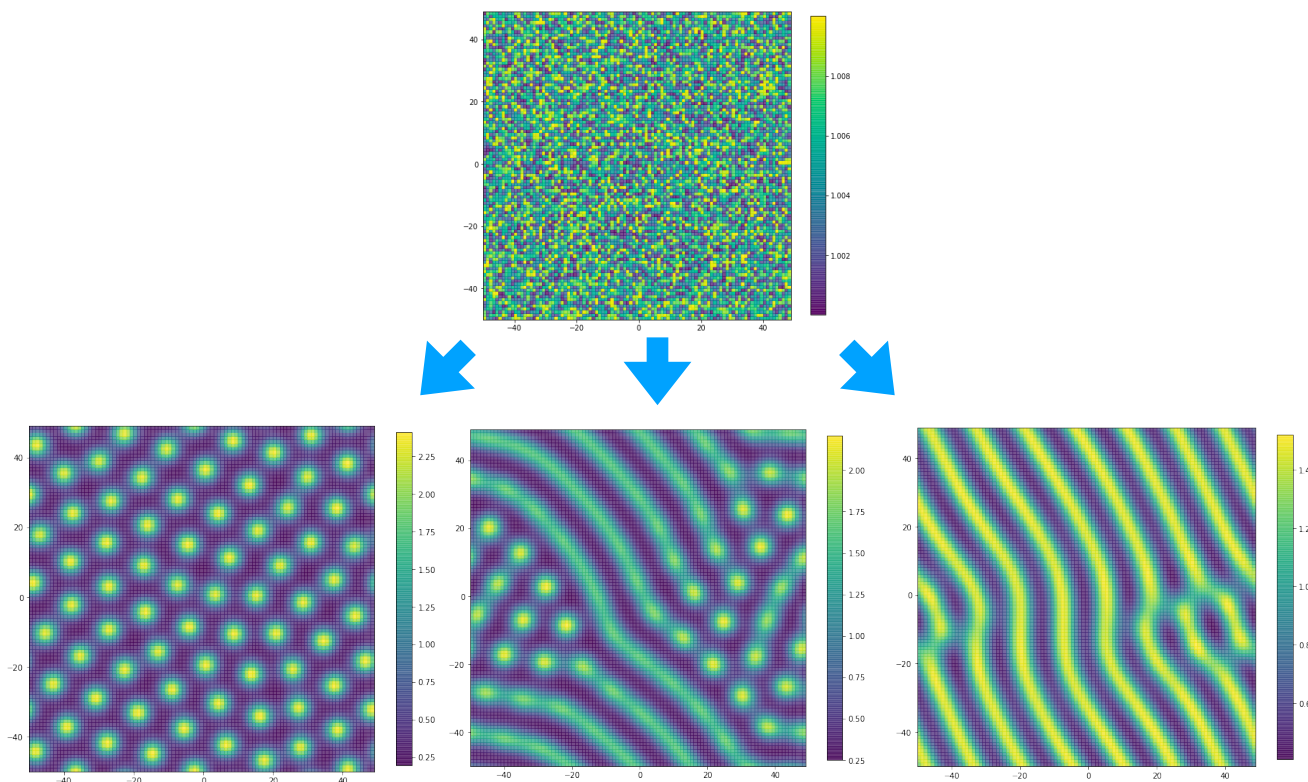
活性化因子  
アクチベーター      抑制因子  
インヒビター

拡散      分解      自己活性化      合成の抑制

7

## チューリングパターン

ほぼ一様な構造のない状態から、自発的に空間的パターンが生じる



8

実際にプログラムを組んでみよう！

9

## 有限差分法による空間の離散化

差分商により微分を近似することで、微分方程式を離散化する

差分を刻み幅で割ったもの

本演習では空間方向の離散化に用いる  
時間方向へはこれまで通りオイラー法を使う

ある関数 $u(x, y)$ を2次元空間上で離散化する。  
 $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ ,  $(x_i, y_j)$ での $u$ の $x$ 方向への偏微分を $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i$ ,  $x$ 方向への刻み幅を $\Delta x$ とすれば,

前進差分による近似

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}$$

オイラー法と同じ

中心差分による近似

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

後退差分による近似

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}$$

2階の中心差分による2階偏微分の近似

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

導出については補足資料参照

$y$ 方向へも同様に考える

#01-01. 1次元の拡散方程式のプログラムを書く。  
 固定境界条件 ( $u(0,t) = u_0, u(x_e, t) = 0$ ) でシミュレーションしてみよう。

- 時間方向の離散化

前進差分により近似

(いつものオイラー法)

- 空間方向の離散化

2階の中心差分により近似

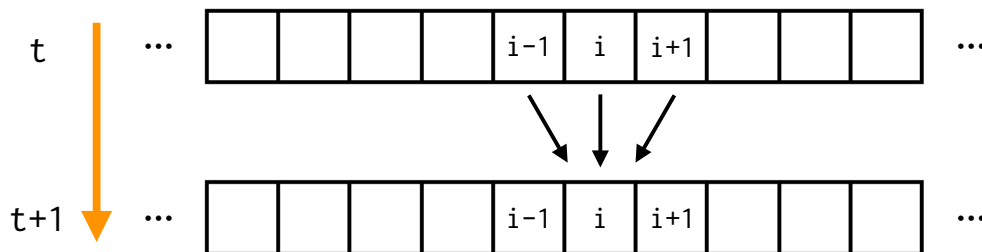
$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u$$

$$\xrightarrow{\text{離散化}} u_{i,t+\Delta t} = u_{i,t} + D \left[ \frac{u_{i-1,t} - 2u_{i,t} + u_{i+1,t}}{\Delta h^2} \right] \Delta t$$

# 01-01-01. 1次元の拡散方程式の関数定義

# 時間方向はオイラー法, 空間方向は中心差分

```
def diff_eq_1d(u_arr, D, dh, dt):
    new_u = u_arr[1] + D*((u_arr[0] + u_arr[2] - 2*u_arr[1])/(dh**2))*dt
    return new_u
```



11

#01-01. 1次元の拡散方程式のプログラムを書く。  
 固定境界条件 ( $u(0,t) = u_0, u(x_e, t) = 0$ ) でシミュレーションしてみよう。

# 01-01-02. 1次元拡散モデルのシミュレーション実行

```
import numpy as np
```

```
D = 1.0 # 拡散係数
```

```
dt = 0.05 # 時間方向の刻み幅
```

```
dx = 0.5 # 空間方向の刻み幅
```

```
u_0 = 1 # 境界条件 u(0,t) = u_0
```

```
x_e = 10 # xの終端
```

```
t_end = 50 # tの終端
```

```
x = np.arange(0,x_e,dx) # x座標
```

```
t_list = [] # 時刻を記録するリスト
```

```
u_list = [] # uを記録するリスト
```

```
u = np.zeros(len(x), dtype = float) # uの初期化
```

```
u[0] = u_0 # 境界条件 u(0,t) = u_0
```

```
u[-1] = 0 # 境界条件 u(x_e,t) = 0
```

```
t_list.append(0)
```

```
u_list.append(np.copy(u))
```

```
for n in range(1, int(t_end/dt) + 1):
    t = n*dt # 時刻tの計算
```

```
    u_tmp = np.zeros(len(x), dtype = float)
```

```
    u_tmp[0] = u_0 # 境界条件 u(0,t) = u_0
```

```
    for i in range(1, len(u)-1):
```

```
        u_tmp[i] = diff_eq_1d(
            u[(i-1):(i+2)], D, dx, dt
        )
```

```
    u_tmp[-1] = 0 # 境界条件 u(x_e,t) = 0
```

```
    u = np.copy(u_tmp)
```

```
    t_list.append(t)
```

```
    u_list.append(np.copy(u))
```

注意：拡散係数に対して、時間解像度が大き過ぎる or 空間解像度が小さすぎると本当の解と異なる挙動を示す。拡散係数を大きくする場合、時間解像度を小さく（ほんの少しの未来だけを計算）

するか、空間解像度を大きく（大雑把に計算）する。少なくとも  $\frac{D\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2}$  を満たす必要がある。

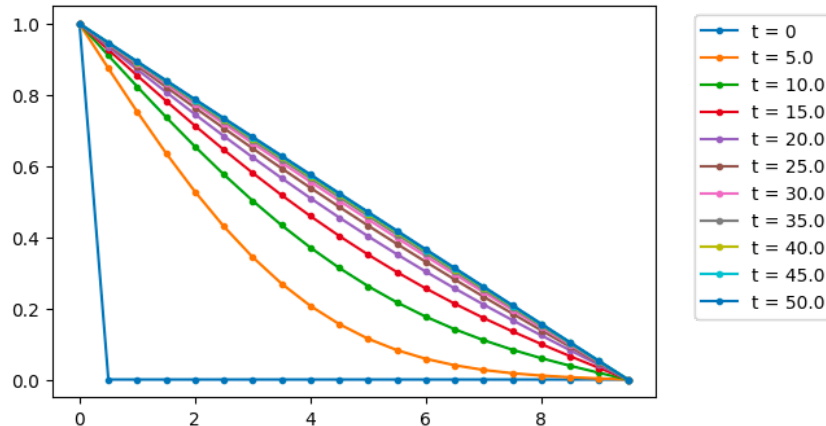
12

#01-01. 1次元の拡散方程式のプログラムを書く。  
 固定境界条件 ( $u(0,t) = u_0, u(x_e, t) = 0$ ) でシミュレーションしてみよう。

# 01-01-03. 結果の可視化

```
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure(dpi=100)
plt.ylim(-0.05, 1.05)
for i in range(0, len(u_list), 100):
    plt.plot(x, u_list[i], "-.", label="t = "+str(t_list[i]))
plt.legend(bbox_to_anchor=(1.05, 1), loc='upper left')
```



時間発展に伴い線形な濃度勾配に近づいていくことが観察できる ( $t \rightarrow \infty$  で  $u(x) = -\frac{u_0}{x_e} + u_0$ ) .

#01-02. 2次元の拡散方程式のプログラムを書く。周期境界条件でシミュレーションしてみよう。  
 x軸方向, y軸方向とも空間方向の刻み幅1で, 範囲はともに(-25,25)とする。初期条件はどこか1  
 つの区画で100 ( $u(x_s, y_s, 0) = 100$ ) とする。

- 時間方向の離散化  
前進差分により近似  
(いつものオイラー法)
- 空間方向の離散化  
2階の中心差分により近似

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \nabla^2 u$$

↓ 離散化

$$u_{i,j,t+\Delta t} = u_{i,j,t} + D \left( \frac{u_{i-1,j,t} + u_{i+1,j,t} + u_{i,j-1,t} + u_{i,j+1,t} - 4u_{i,j,t}}{\Delta h^2} \right) \Delta t$$

導出してみよう

ただし,  $\Delta h = \Delta x = \Delta y$ .

# 01-02-01. 2次元の拡散方程式の関数定義

```
def diff_eq_2d(u_arr, D, dh, dt):  
    new_u = u_arr[1,1] \  
    + D*((u_arr[0,1] + u_arr[2,1] + u_arr[1,0] + u_arr[1,2] - 4*u_arr[1,1])/(dh**2))*dt  
    return new_u
```

$$u_{i,j,t+\Delta t} = u_{i,j,t} + D \left( \frac{u_{i-1,j,t} + u_{i+1,j,t} + u_{i,j-1,t} + u_{i,j+1,t} - 4u_{i,j,t}}{\Delta h^2} \right) \Delta t$$

# 01-02-p. 2次元の拡散方程式の擬似コード

■ 各種パラメータ、初期値の設定  
■ 場の設定 (x, y)

■ 結果を記録するリストの定義

■ uの初期化

■ for ステップ数 in 繰り返し回数:  
    時刻tの計算

■ -- 状態遷移 --

    u\_tmp = update(u, D, dh, dt)

■ 情報の更新

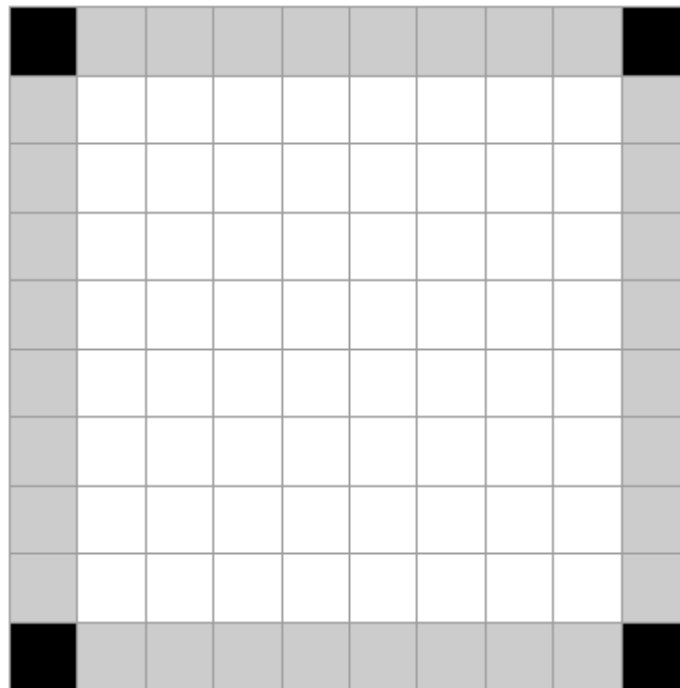
■ 結果のリストへの記録

こんな感じのプログラムを作ってみよう。  
今回は、update()という関数を定義して、  
uを一気に計算してみる。

15

## 2次元空間での境界条件

復習



境界条件の処理を適切に分岐させよう

16

# 01-02-02. 2次元の拡散方程式に基づく更新

```
def update(field, D, dh, dt):
    n_i, n_j = field.shape
    new_field = np.zeros((n_i, n_j), dtype=field.dtype)

    for i in range(n_i):
        for j in range(n_j):
            if i == 0:
                if j == 0:
                    # 境界条件処理 i=0,j=0
                    new_field[i,j] = diff_eq_2d(field[[-1,0,1],:][:,[-1,0,1]], D, dh, dt)
                elif 0<j<n_j-1:
                    # 境界条件処理 i=0,0<j<n_j-1
                    new_field[i,j] = diff_eq_2d(field[[-1,0,1],:][:,[j-1,j,j+1]], D, dh, dt)
                elif j == n_j-1:
                    # 境界条件処理 i=0,j=n_j-1
                    new_field[i,j] = diff_eq_2d(field[[-1,0,1],:][:,[n_j-2,n_j-1,0]], D, dh, dt)
            elif 0 < i < n_i-1:
                if j == 0:
                    # 境界条件処理 1<i<n_i-1,j=0
                    new_field[i,j] = diff_eq_2d(field[[i-1,i,i+1],:][:,[-1,0,1]], D, dh, dt)
                elif 0 < j < n_j-1:
                    # メイン (1<i<n_i-1,1<j<n_j-1)
                    new_field[i,j] = diff_eq_2d(field[[i-1,i,i+1],:][:,[j-1,j,j+1]], D, dh, dt)
                elif j == n_j-1:
                    # 境界条件処理 1<i<n_i-1,j=n_j-1
                    new_field[i,j] = diff_eq_2d(field[[i-1,i,i+1],:][:,[n_j-2,n_j-1,0]], D, dh, dt)
            elif i == n_i-1:
                if j == 0:
                    # 境界条件処理 i=n_i,j=0
                    new_field[i,j] = diff_eq_2d(field[[n_i-2,n_i-1,0],:][:,[-1,0,1]], D, dh, dt)
                elif 0<j<n_j-1:
                    # 境界条件処理 i=n_i-1,1<j<n_j-1
                    new_field[i,j] = diff_eq_2d(field[[n_i-2,n_i-1,0],:][:,[j-1,j,j+1]], D, dh, dt)
                elif j == n_j-1:
                    # 境界条件処理 i=n_i-1,j=n_j-1
                    new_field[i,j] = diff_eq_2d(field[[n_i-2,n_i-1,0],:][:,[n_j-2,n_j-1,0]], D, dh, dt)

    return new_field
```

場（ここではu）の配列の形状（幅と高さ）を取得

配列のスライス  
を思い出そう

17

#01-02. 2次元の拡散方程式のプログラムを書く。周期境界条件でシミュレーションしてみよう。  
x軸方向、y軸方向とも空間方向の刻み幅1で、範囲はともに(-25,25)とする。初期条件はどこか1  
つの区画で100 ( $u(x_s, y_s, 0) = 100$ ) とする。

これを

```
# 01-02-p. 2次元の拡散方程式の擬似コード
# 各種パラメータ、初期値の設定
# 場の設定 (x,y)
# 結果を記録するリストの定義
# uの初期化
for ステップ数 in 繰り返し回数:
    時刻tの計算
    # -- 状態遷移 --
    u_tmp = update(u, D, dh, dt)
    情報の更新
    結果のリストへの記録
```

実際に実装すると、こんな感じ。 →

ここに挙げているのはあくまで一例。  
自分がやりやすい方法で実装してOK。

```
# 01-02-03. 2次元拡散モデルのシミュレーション実行
D = 1.0 # 拡散係数
dt = 0.05 # 時間方向の刻み幅
dh = 1 # 空間方向の刻み幅
u_0 = 100 # uの初期濃度

x = np.arange(-25,25,dh)
y = np.arange(-25,25,dh)
xmesh, ymesh = np.meshgrid(x,y)

t_end = 50 # tの終端

t_list = [] # 時刻を記録するリスト
u_list = [] # uを記録するリスト

u = np.zeros([len(x), len(y)], dtype = float) # uの初期化
u[25,25] = u_0 # 境界条件 u(0,t) = u_0

t_list.append(0)
u_list.append(np.copy(u))

for n in range(int(t_end/dt)):
    t = (n+1)*dt # 時刻tの計算

    # -- 状態遷移 --
    u_tmp = update(u, D,dh,dt)

    # 情報の更新
    t_list.append(t)
    u = np.copy(u_tmp)
    u_list.append(np.copy(u))
```

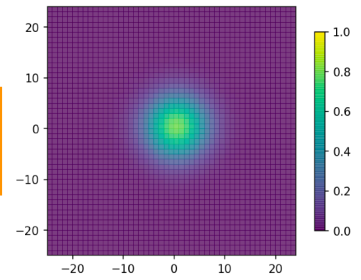
18

プロットしたいuListの要素（ある時刻のuの結果）を指定する。ここでは最終状態(-1)をプロットしている

# 01-02-04a. 結果の可視化

```
fig, ax = plt.subplots(dpi=150)
ax.set_aspect('equal')
pcm = ax.pcolormesh(xmesh,ymesh,u_list[200],alpha=0.75,vmin=0,vmax=1)
fig.colorbar(pcm, ax=ax, shrink=0.8)
plt.show()
```

vmin,vmaxはプロットするZの値の範囲。指定しなければ自動で規格化される。



- matplotlib.pyplot
  - pcolormesh(X, Y, Z) 座標X, Yに対してZの値を色でプロット
- mpl\_toolkits.mplot3d.Axes3D
  - plot\_surface(X, Y, Z) 座標X, Yに対してZの値を高さで3Dプロット

# 01-02-4b. 結果の可視化 (3D)

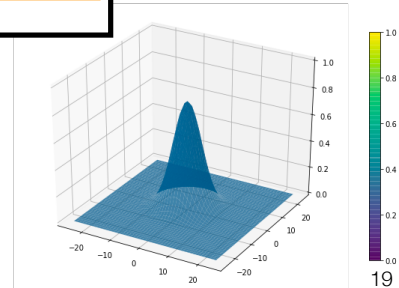
```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

fig = plt.figure(figsize=(10,7))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
surf = ax.plot_surface(xmesh,ymesh,u_list[200], vmin=0,vmax=1, alpha=0.75)
ax.plot([0,0], [0,0], [0,1], 'w', alpha=0.1)
fig.colorbar(surf, shrink = 0.8)
plt.grid()
plt.show()
```

プロットされるZの値の範囲を調整するためのトリック

plotlyを使えばインタラクティブな3Dプロットができる。  
興味ある人は試してみよう。

どうすれば結果を確認しやすいかを考えて、  
他のプロット方法も検討しよう。



# 反応拡散モデル

# 02. ギーラー-メインハルト系の反応拡散モデルについてプログラムを組み、  
様々なパタンを描く

## 方針

### 1. モデルの離散化

$$\begin{array}{l}
 \text{アクチベーター} \\
 \text{インヒビター}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial u}{\partial t} = D_u \nabla^2 u - d_u u + k_1 \frac{u^2}{v} + k_2 \\
 \frac{\partial v}{\partial t} = D_v \nabla^2 v - d_v v + k_3 u^2
 \end{array} \right.
 \xrightarrow{\text{離散化}} ?$$

### 2. 2次元拡散方程式を参考にプログラムを組む

- 基本的には、拡散方程式を反応拡散方程式系に変えるだけ。  
ただし、拡散性分子が2種類あり、相互に依存することに注意。
- どのようなupdate関数を定義すれば良いだろうか？

### 3. 初期値の設定

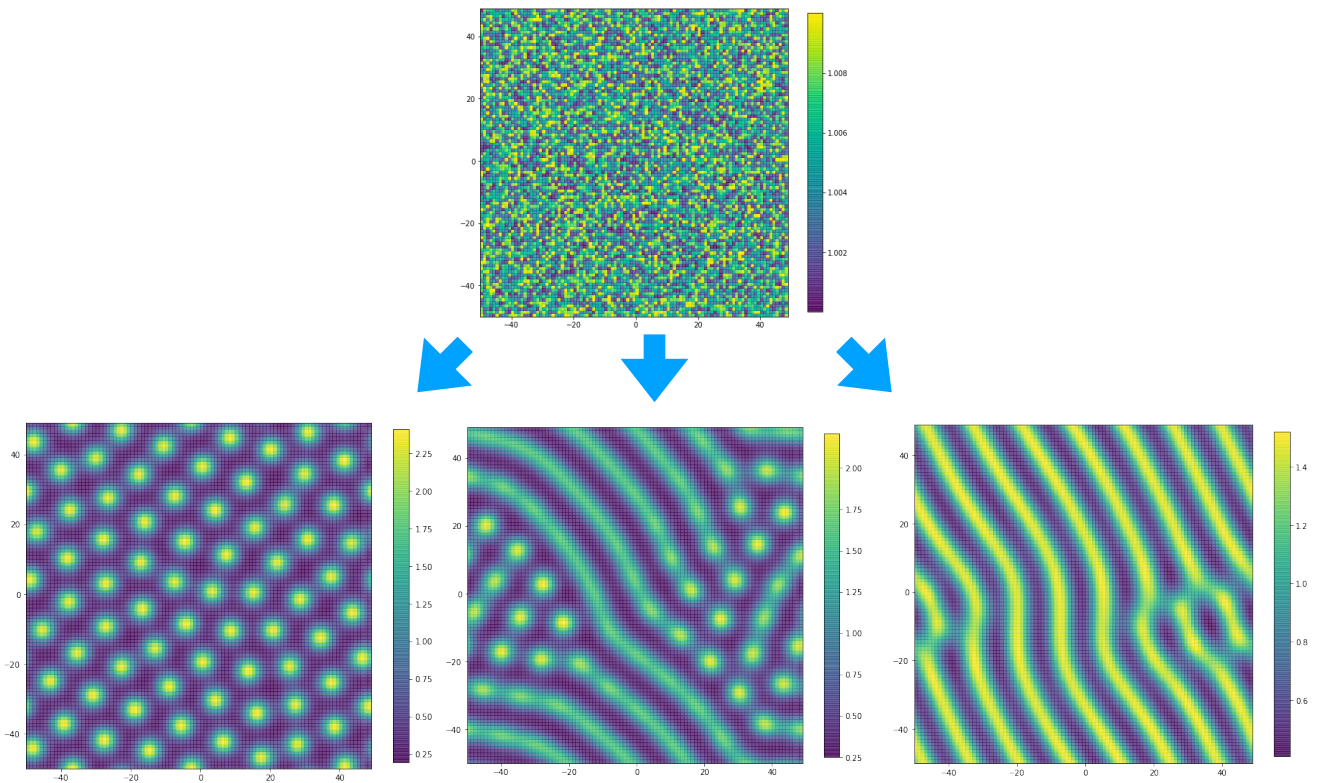
u=1.0, v=1.0にわずかなノイズ  
(0.0~0.01程度)を加える。

### 4. 拡散係数 (Du, Dv) を変化させて

どのようなパタンが生じるか調べる

# チューリングパターン

ほぼ一様な構造のない状態から、自発的に空間的パターンが生じる



21

## 反応拡散モデル 疑似コード

```
# 02-p. 2次元の反応拡散モデルの疑似コード
```

```
各種パラメータ, 初期値の設定  
場の設定 (x, y)
```

```
結果を記録するリストの定義
```

```
uの初期化
```

```
vの初期化
```

```
for ステップ数 in 繰り返し回数:
```

```
    時刻tの計算
```

```
    # -- 状態遷移 --
```

```
    情報の更新
```

```
    結果のリストへの記録
```

どんな状態遷移用の関数を定義したら良いだろうか？

22

# 本日の課題

ノーマル：  
1つ選ぶ

ハード：  
両方

1. 反応拡散系のパラメータや初期値を変化させた様々なパターンを観察せよ。また、こういった傾向があるかを考察せよ。
2. 反応拡散系のパラメータや初期値を変化させて生物の体表面に観察される模様を幾つか再現せよ。また、それはこういった生物にみられるか例を挙げよ。
3. 質問、意見、要望等をどうぞ。

課題をノートブック (.ipynbファイル) にまとめて、Moodleにて提出すること  
ファイル名は[回数, 01~15]\_[難易度, ノーマル nかハード h].ipynb. 例. 11\_nh.ipynb <sup>23</sup>

## 次回予告

### 第11回：応用例紹介（1）

確率過程？

6月28日

## 復習推奨

- 疑似乱数